

Kostenrundung von Kanten auf Pfaden

Vivica Wirth

09.02.2015

Gliederung

1. Grundlagen
2. Basisalgorithmen
 - 2.1. Mathematisches Runden
 - 2.2. Zufallsrunden
3. Eigene Ansätze
 - 3.1. Pfadkorrektur
 - 3.2. Alternierendes Runden
 - 3.3. Gewichtetes Runden
4. Erweiterungen

Graphformat

Knoten

Kanten

Für alle Knoten:

<Breitengrad> <Längengrad> <Höhe>

Für alle Kanten:

<Start> <Ziel> <Distanz>

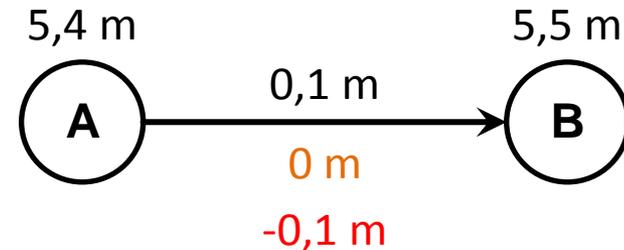
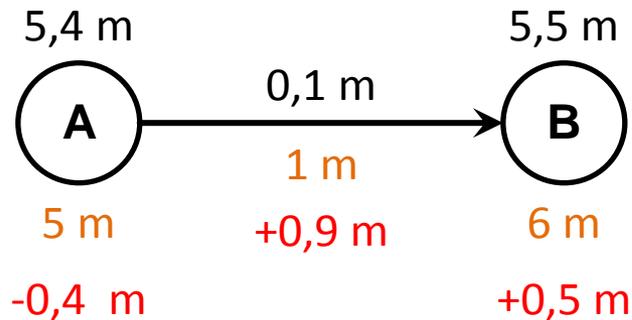
Höhe runden

Knoten:

- + Ersetzen des Wertes
- Doppelter Fehler

Kanten:

- + Einfacher Fehler
- Hinzufügen des Wertes



Definition Aufrunden: Von 0 weg

Definition Abrunden: Zu 0 hin

Betrachtete Größe

Endhöhe:

- Relative Höhe des Endknotens
- nachschaubar

Höhenmeter:

- Gesamte überwundene Höhe
- Nicht nachschaubar

Vergleich der Algorithmen

- Abweichung der Höhenmeter
- Menge an Zufallspfaden
- Korrigierte Stichprobenvarianz

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

- Plots

Mathematisches Runden

- Während Einlesen
- 3 Regeln:
 - $[x],1$ bis $[x],4$: Abrunden
 - $[x],6$ bis $[x],9$: Aufrunden
 - $[x],5$:
 - Folgt eine Zahl $\neq 0$: Aufrunden
 - Sonst: Zur geraden Zahl runden
- Mehraufwand: $O(n)$

Maximaler Fehler

- Eine Kante: 0,50 dm
- n Kanten: $n * 0,50$ dm
- $P(F_{\max}) = \left(\frac{1}{200}\right)^n$
- $P(F_{\text{FastMax}}) = \left(\frac{1}{100}\right)^n$ (um $n * 0,01$ dm kleiner)

Strukturen mit großem Fehler

- Bereich über Pfad schieben
 - Bereichsgröße: 1.800 m
 - Schrittgröße: 50 m
- Vollständige Kanten
- Summe der Abweichung

Strukturen mit großem Fehler

% der max. Dichte	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90	90 - 100	100
10k	1	23	69	229	326	270	323	300	424	173
100k	123	177	784	1.161	1.355	1.682	2.841	922	912	437
500k	80	1.392	4.989	8.650	8.901	7.672	7.613	5.883	4.833	1021
1m	316	2.507	7.805	16.684	19.071	18.237	13.270	12.756	8.799	1.861

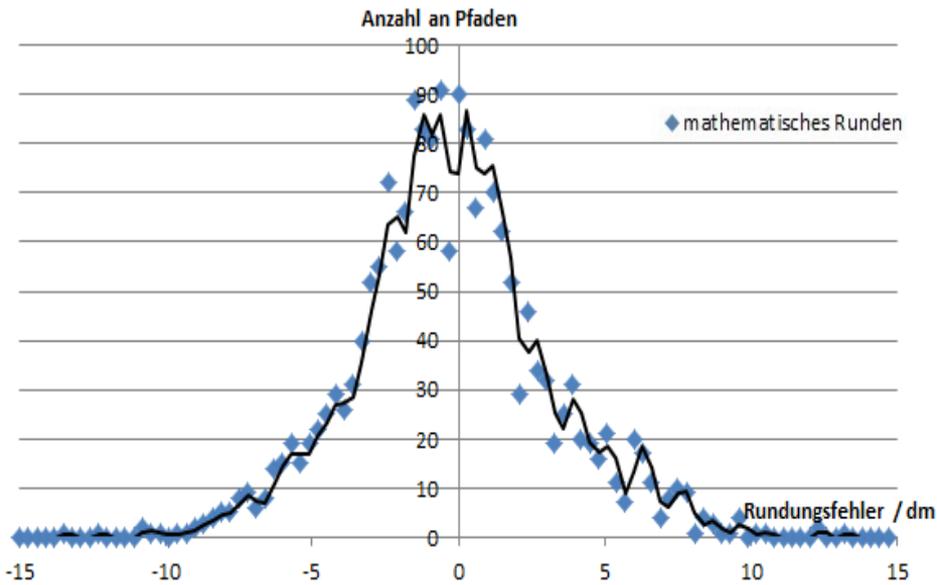
➤ Höhere Kantendichte, größerer Fehler

➤ Strecken mit viel Änderung

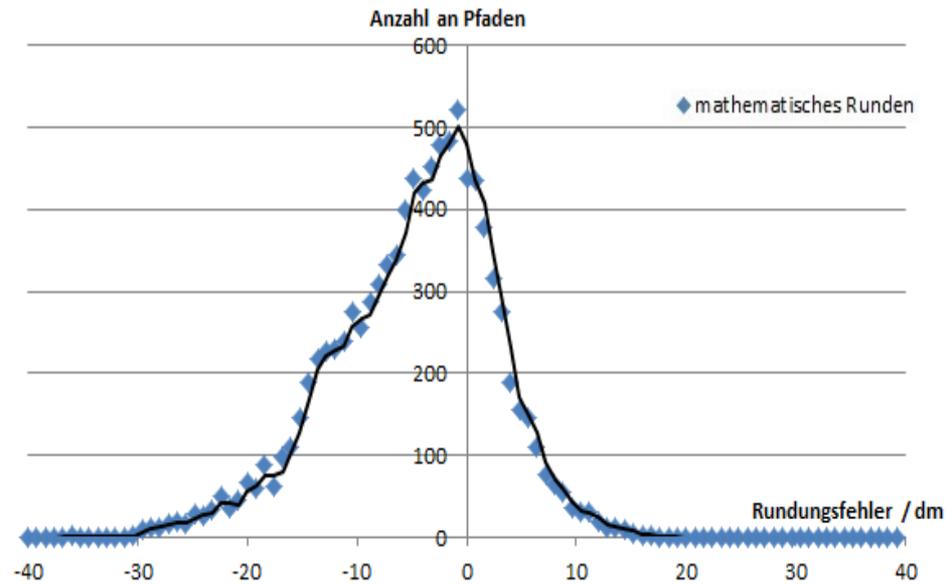
Empirische Auswertung

- Zufallspfade
- Korrigierte Stichprobenvarianz
- # Pfade mit bestimmter Abweichung in Plot

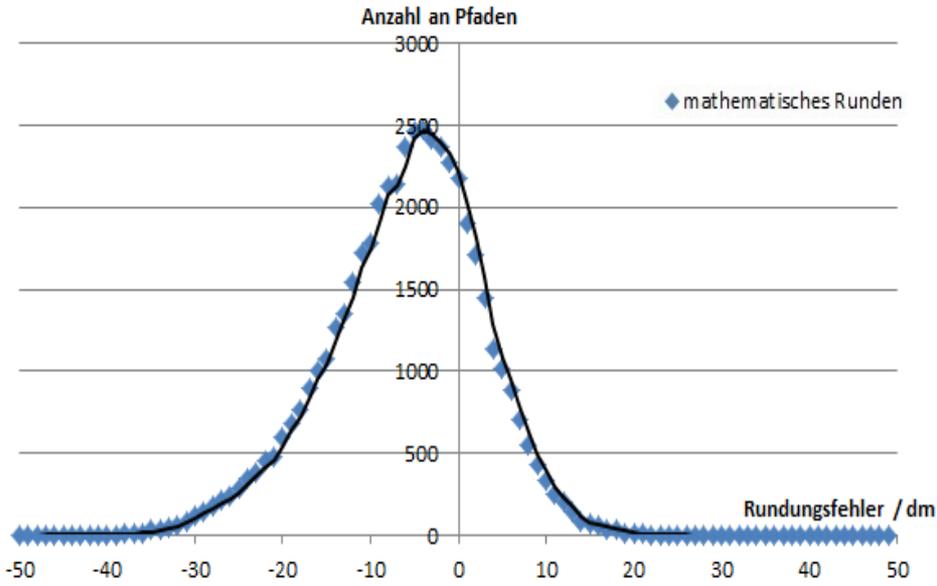
Absoluter Fehler Höhenmeter 10k



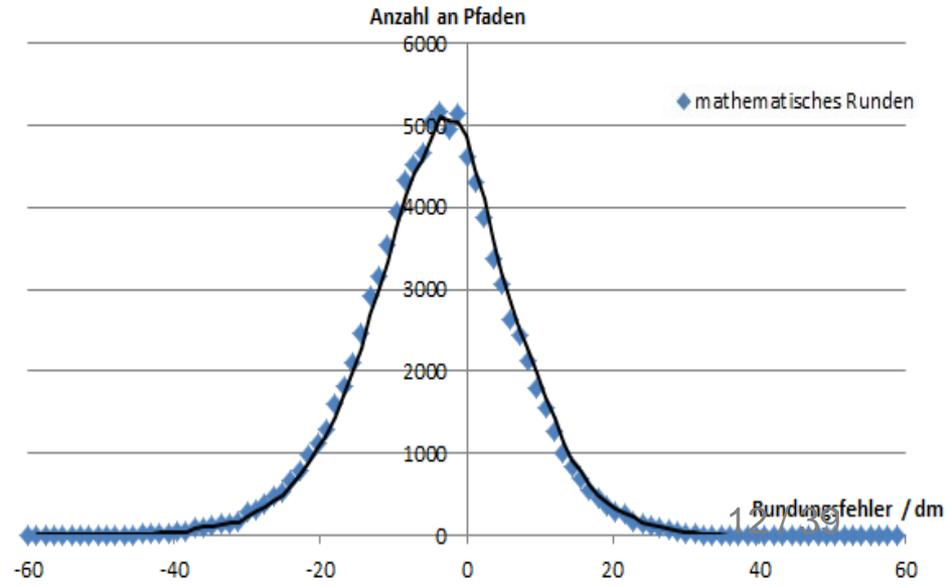
Absoluter Fehler Höhenmeter 100k



Absoluter Fehler Höhenmeter 500k



Absoluter Fehler Höhenmeter 1m



Empirische Auswertung

Graph	10k	100k	500k	1m
Stichprobengröße	2.000 Paare	10.000 Paare	50.000 Paare	100.000 Paare
kein Pfad	69 Paare	126 Paare	232 Paare	563 Paare
Math. Runden	10,70 dm	54,89 dm	76,88 dm	109,34 dm

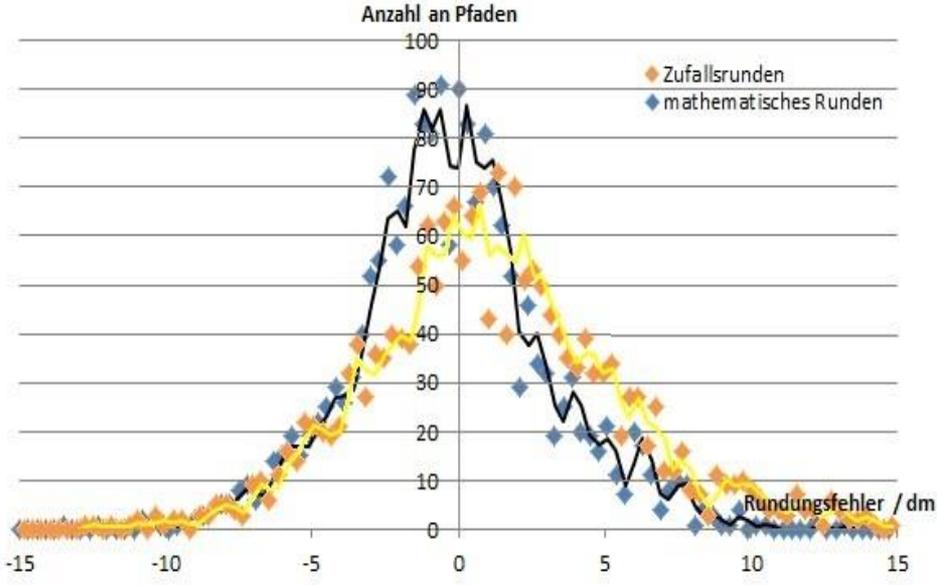
Zufallsrunden

- Während Einlesen
- Nachkommastellen als Aufrundwahrscheinlichkeit
- Vergleich mit Zufallszahl
- Mehraufwand: $O(n)$

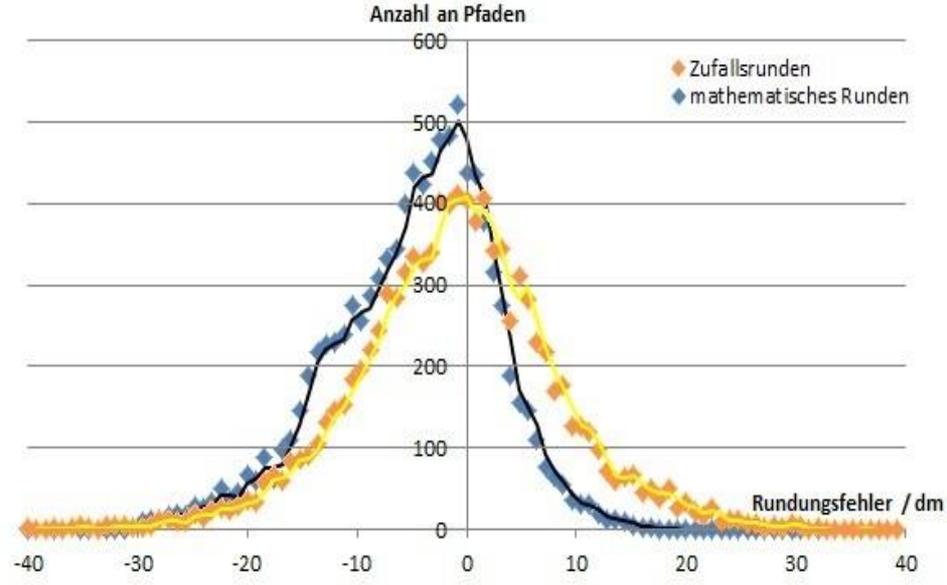
Maximaler Fehler

- Eine Kante: 0,99 dm
- n Kanten: $n * 0,99$ dm
- $P(F_{\max}) = \left(\frac{1}{10.000}\right)^n$

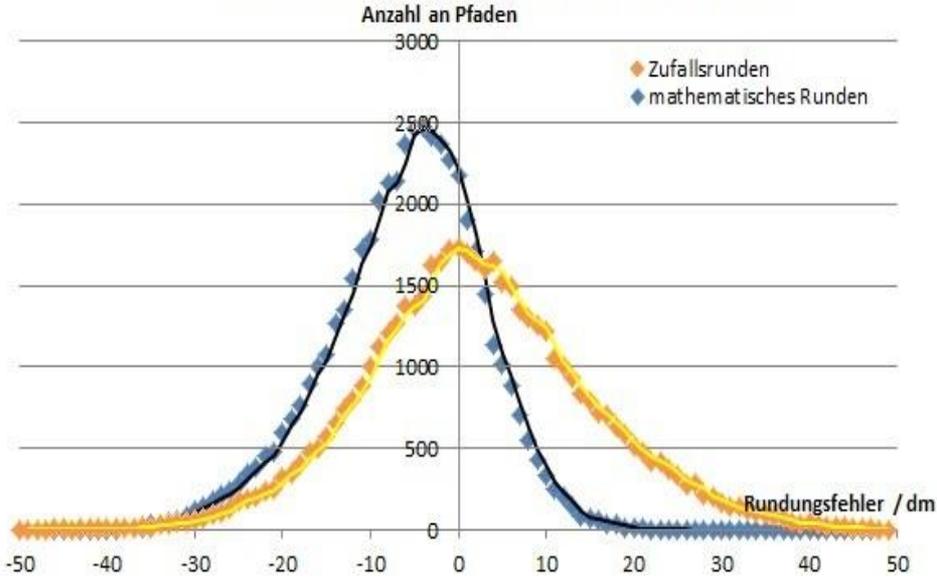
Absoluter Fehler Höhenmeter 10k



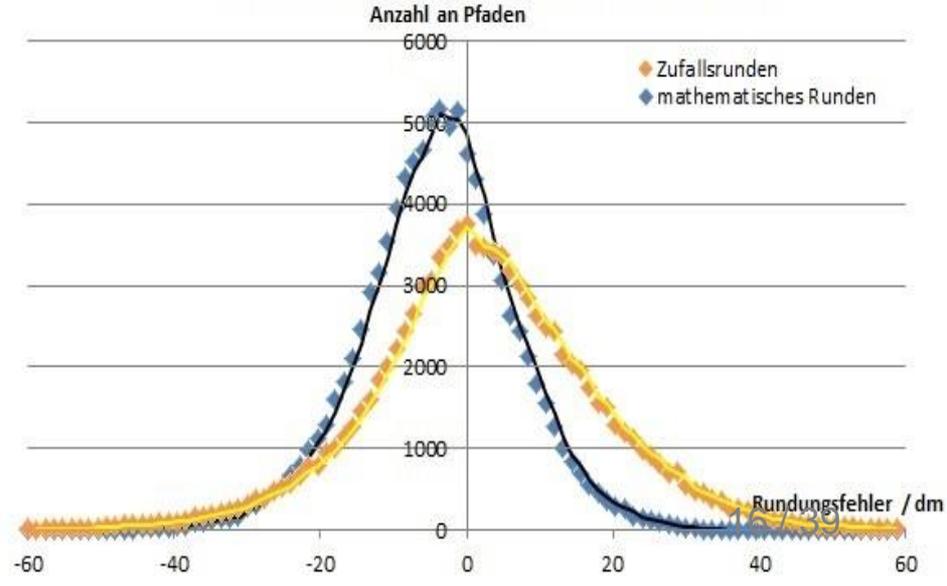
Absoluter Fehler Höhenmeter 100k



Absoluter Fehler Höhenmeter 500k



Absoluter Fehler Höhenmeter 1m



Empirische Auswertung

Graph	10k	100k	500k	1m
Stichprobengröße	2.000 Paare	10.000 Paare	50.000 Paare	100.000 Paare
kein Pfad	69 Paare	126 Paare	232 Paare	563 Paare
Math. Runden	10,70 dm	54,89 dm	76,88 dm	109,34 dm
Zufallsrunden	18,81 dm	83,93 dm	168,60 dm	244,41 dm

Pfadkorrektur

- Basis: Summenerhaltendes Runden [1]

$$0,4 + 0,3 = 0,7$$

$$0 + 0 \neq 1$$

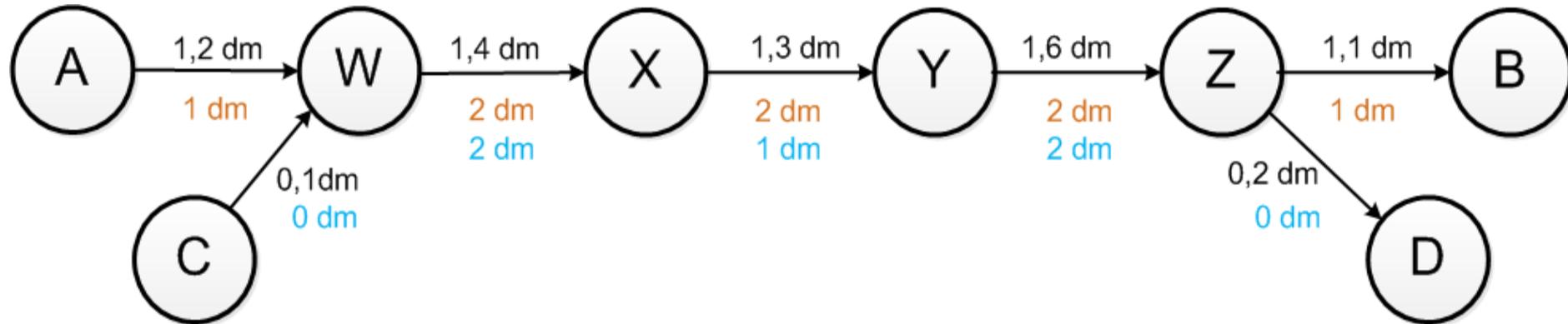
$$1 + 0 = 1$$

- Kanten von Zufallspfaden

Einzelner Pfad

1. Positive, negative und gesamte Höhenmeter ermitteln
 - Exakt: alle; mathematisch gerundet: gesamt; abgerundet: positive und negative
2. Exakter Gesamtwert = math. Gerundetem?
3. Exakte Werte runden & Summe aus pos. und neg. Werten überprüfen
 - Ggf. positive/negative Höhenmeter angleichen
4. Kanten anpassen; positive und negative Werte getrennt

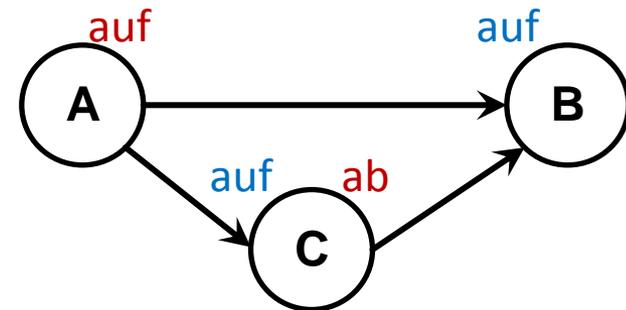
Problematik



- Pfadüberlagerung
- Endgültiger Wert von Kanten unbekannt

Alternierendes Runden

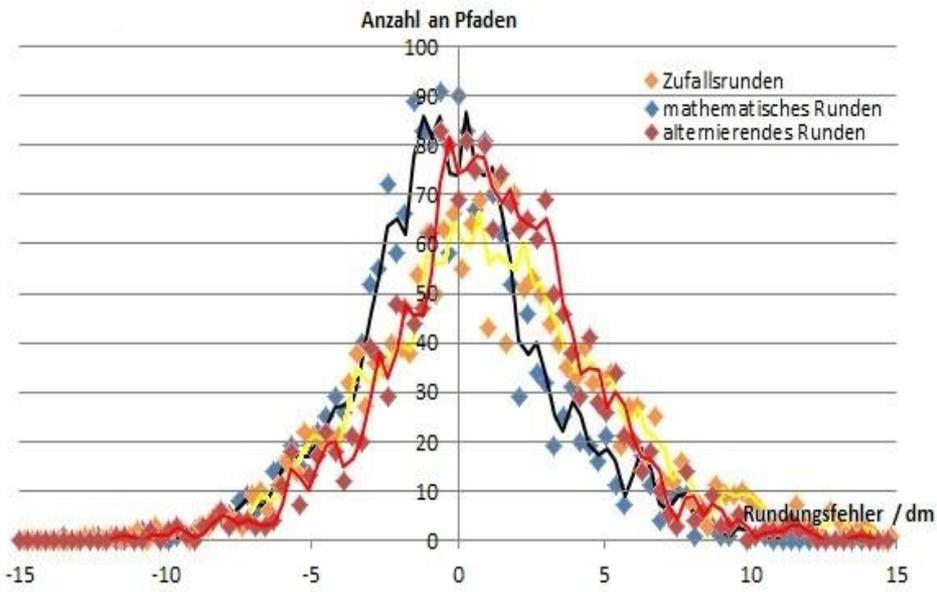
- Basis: Dithering [2]
- Ähnlich: Breitensuche
- Start: Zufallsknoten
- Alternieren von Auf- & Abrunden
- Bei Konflikt: mathematisch runden
- Unzusammenhängende Graphen: neuer Startknoten
- Mehraufwand: $O(n)$



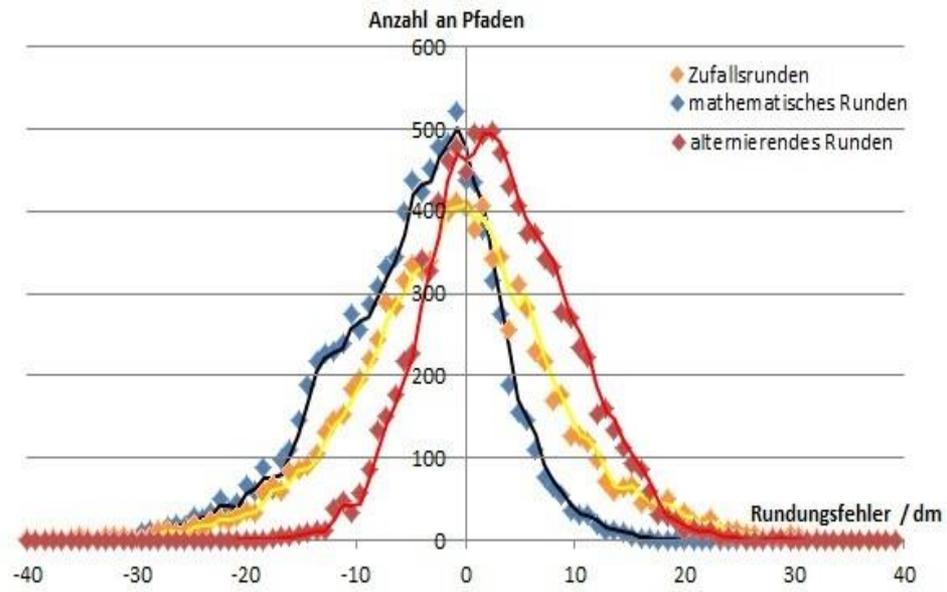
Maximaler Fehler

- Eine Kante: 0,99 dm
- n Kanten ohne Konflikt: $0,9 \text{ dm} + 0,4 * (n - 1) \text{ dm}$
- n Kanten mit Konflikt: $0,9 \text{ dm} + 0,5 * (n - 1) \text{ dm}$
- $P(F_{\max}) = \left(\frac{1}{100}\right)^n$

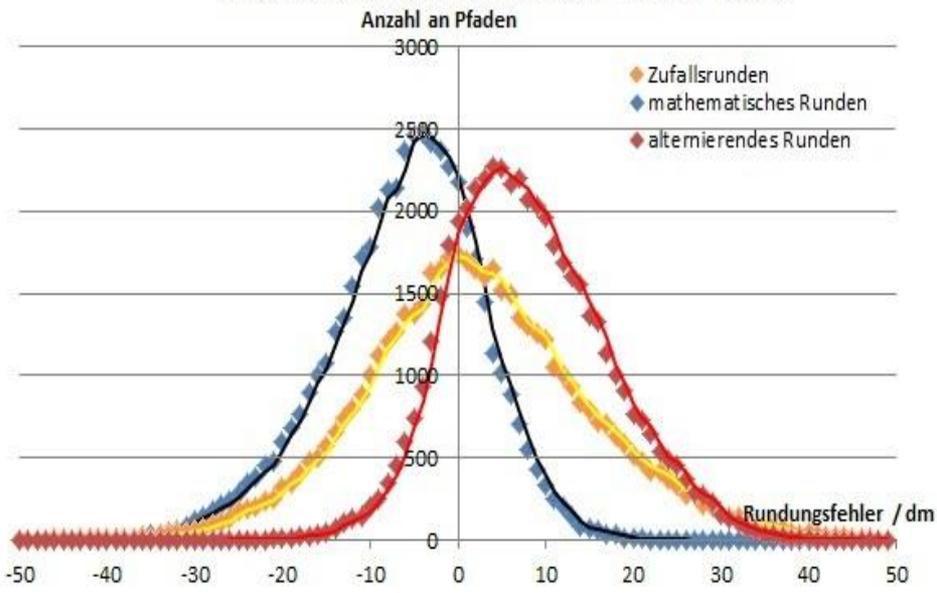
Absoluter Fehler Höhenmeter 10k



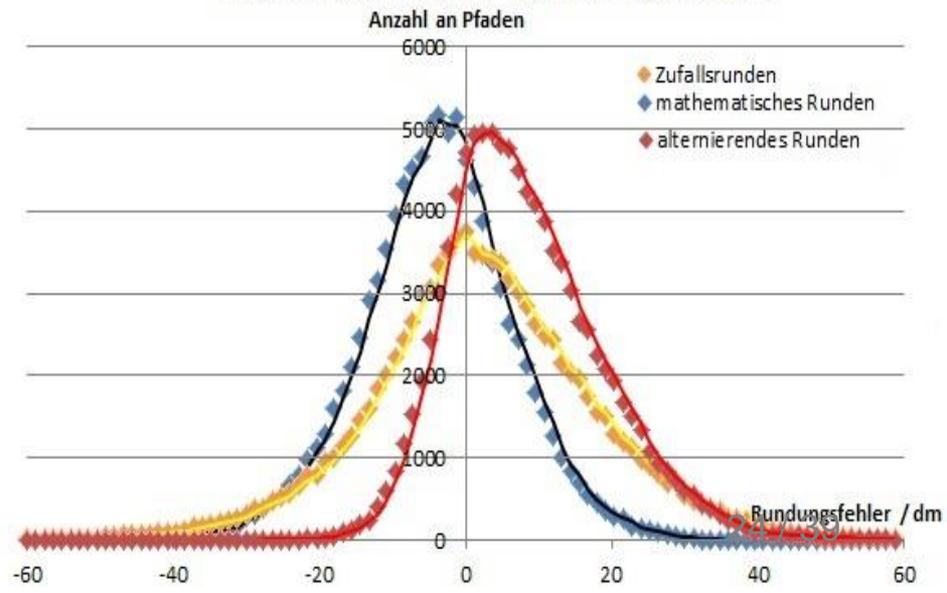
Absoluter Fehler Höhenmeter 100k



Absoluter Fehler Höhenmeter 500k



Absoluter Fehler Höhenmeter 1m



Empirische Auswertung

Graph	10k	100k	500k	1m
Stichprobengröße	2.000 Paare	10.000 Paare	50.000 Paare	100.000 Paare
kein Pfad	69 Paare	126 Paare	232 Paare	563 Paare
Math. Runden	10,70 dm	54,89 dm	76,88 dm	109,34 dm
Zufallsrunden	18,81 dm	83,93 dm	168,60 dm	244,41 dm
Alternierendes Runden	11,90 dm	42,43 dm	81,97 dm	112,26 dm

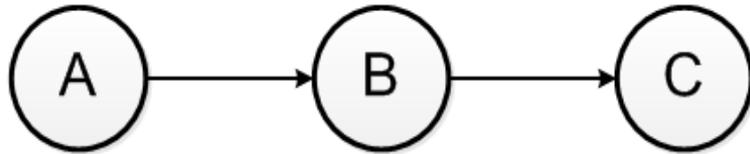
Zusatz: Superkante

- Teilpfad ohne Verzweigung
 - Eingangsgrad ≤ 2
 - Ausgangsgrad ≤ 2
- Pfadkorrektur

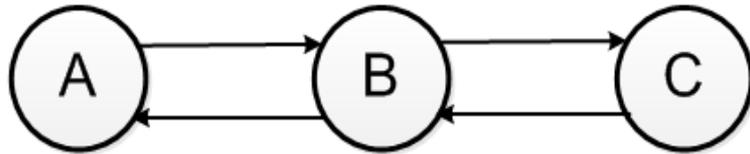
- Mehraufwand vgl. zu ohne Superkanten: $O(n^2)$
- Mehraufwand insgesamt: $O(n^3)$

- Maximaler Fehler unverändert

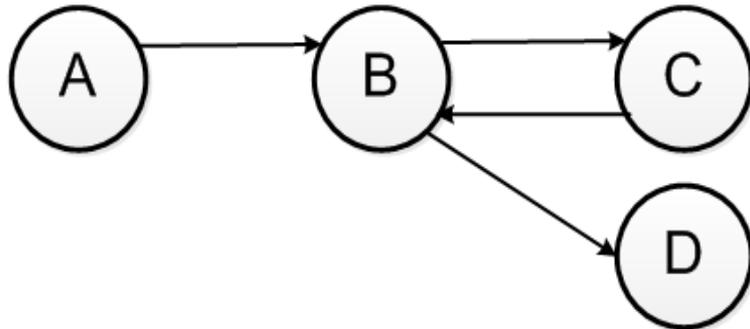
1)



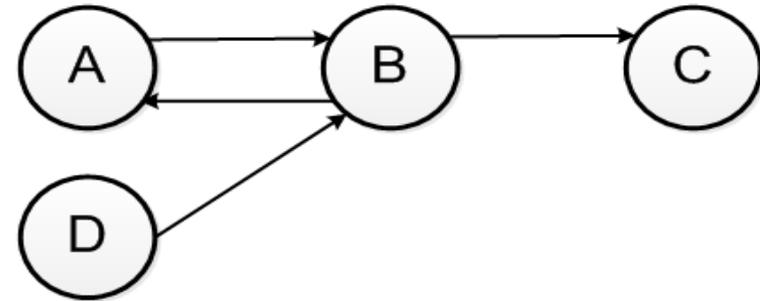
2)



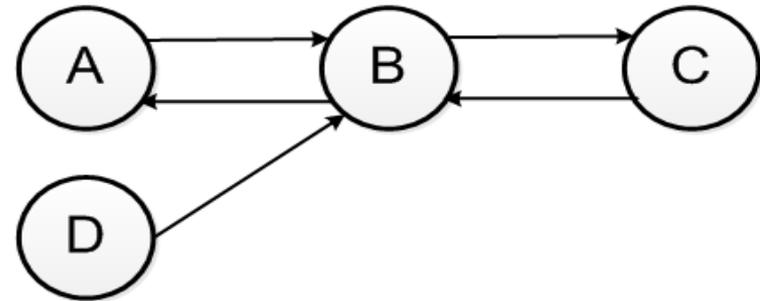
3)



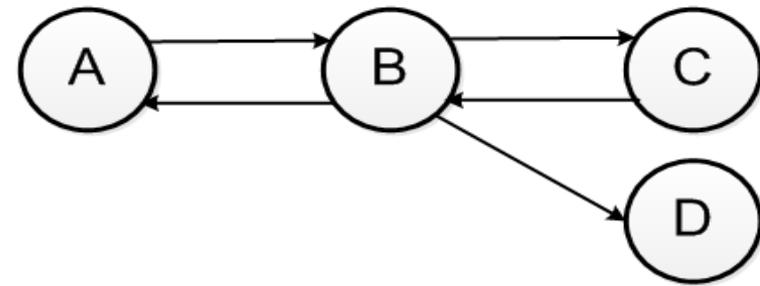
4)



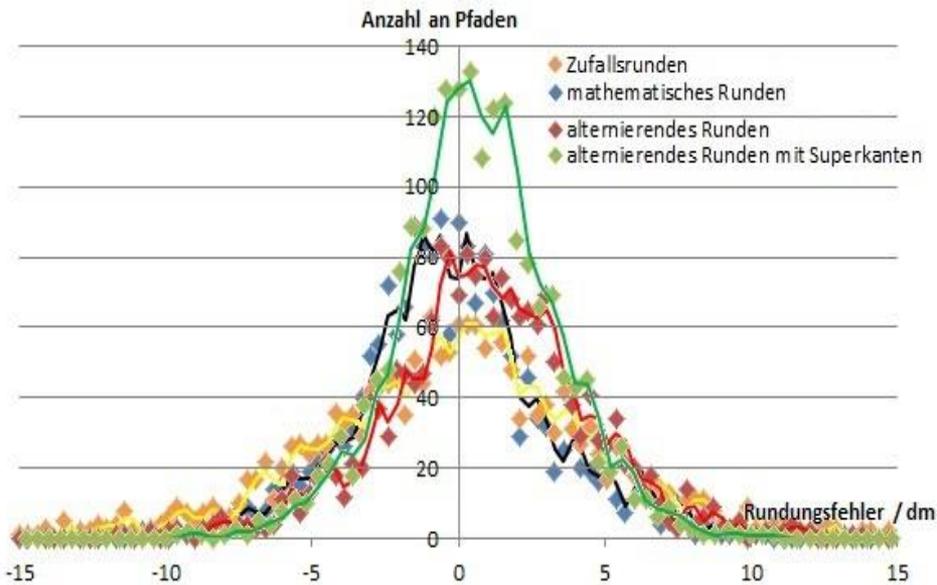
5)



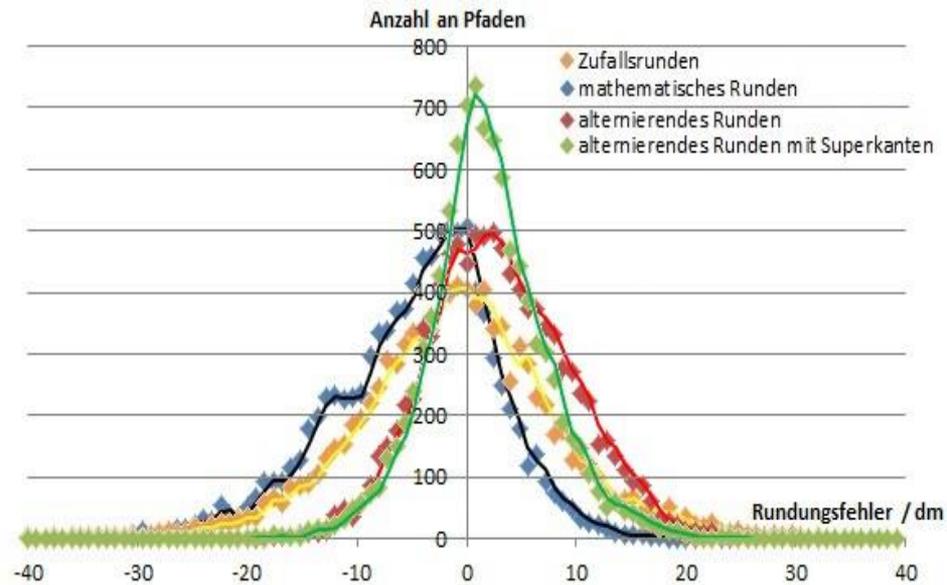
6)



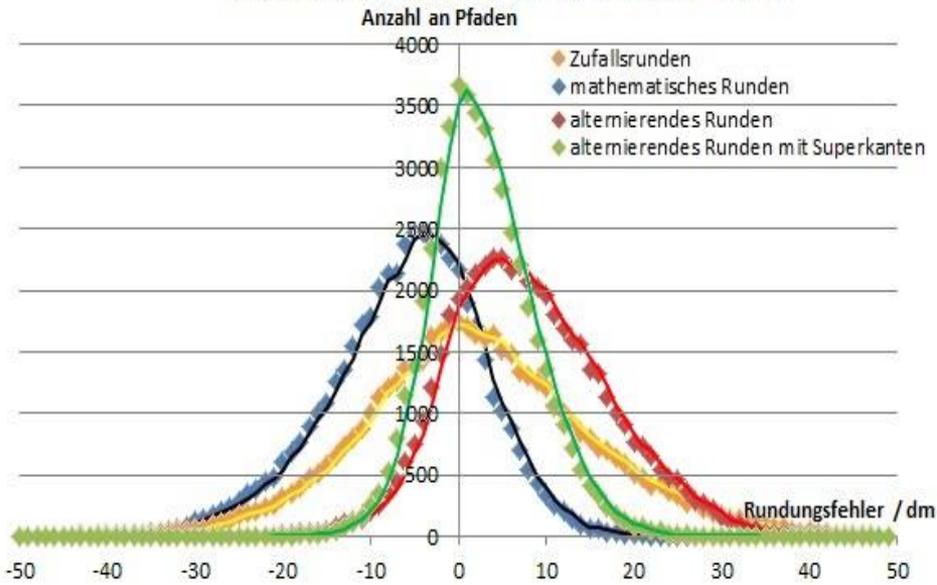
Absoluter Fehler Höhenmeter 10k



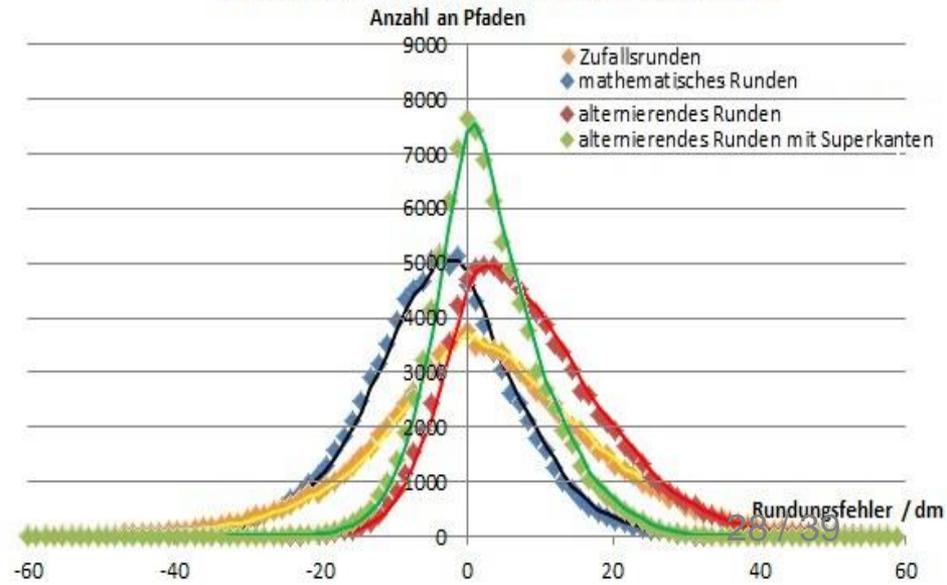
Absoluter Fehler Höhenmeter 100k



Absoluter Fehler Höhenmeter 500k



Absoluter Fehler Höhenmeter 1m



Empirische Auswertung

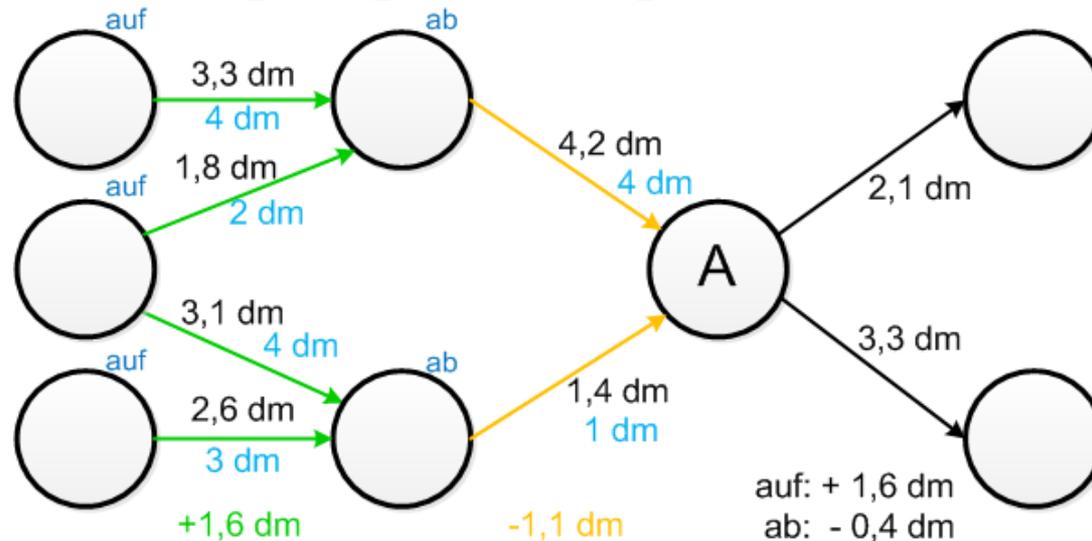
Graph	10k	100k	500k	1m
Stichprobengröße	2.000 Paare	10.000 Paare	50.000 Paare	100.000 Paare
kein Pfad	69 Paare	126 Paare	232 Paare	563 Paare
Math. Runden	10,70 dm	54,89 dm	76,88 dm	109,34 dm
Zufallsrunden	18,81 dm	83,93 dm	168,60 dm	244,41 dm
Alternierendes Runden	11,90 dm	42,43 dm	81,97 dm	112,26 dm
+ Superkanten	7,30 dm	28,53 dm	35,38 dm	57,96 dm

Zusatz: Gewichtung

- Alternierung durchbrechen (alle Ausgänge)

- Vorgänger-, Eingangs- & Eigenfehler

- Grenzschwelle



- Mehraufwand insgesamt: $O(n)$

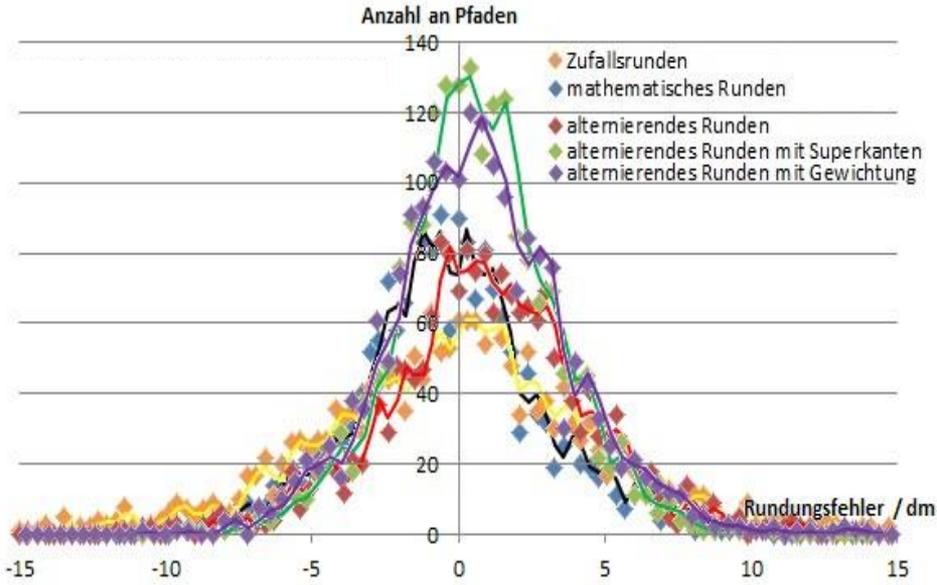
Wahl der Gewichtung

Auf 10k Graph durchgeführt:

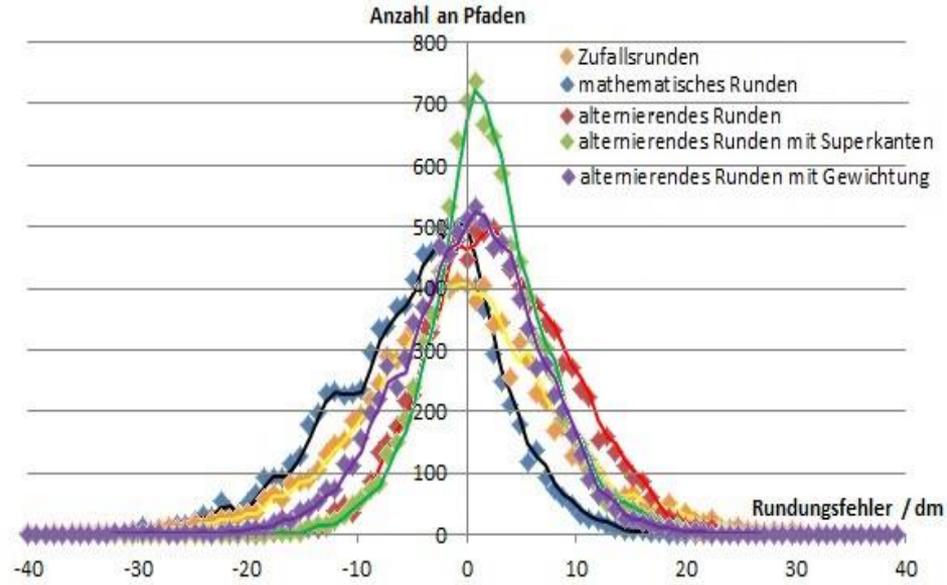
Vorgängergewichtung	1	1	1	0,5	0,5	0,5
Eingangsgewichtung	1	1	1	1	1	1
Eigengewichtung	1	1	1	1	2	2
Grenzschwelle	1	2	0,5	1	1	2
korrigierte Stichprobenvarianz	9,10 dm	9,58 dm	8,98 dm	10,67 dm	10,67 dm	10,67 dm

↑
Wahl

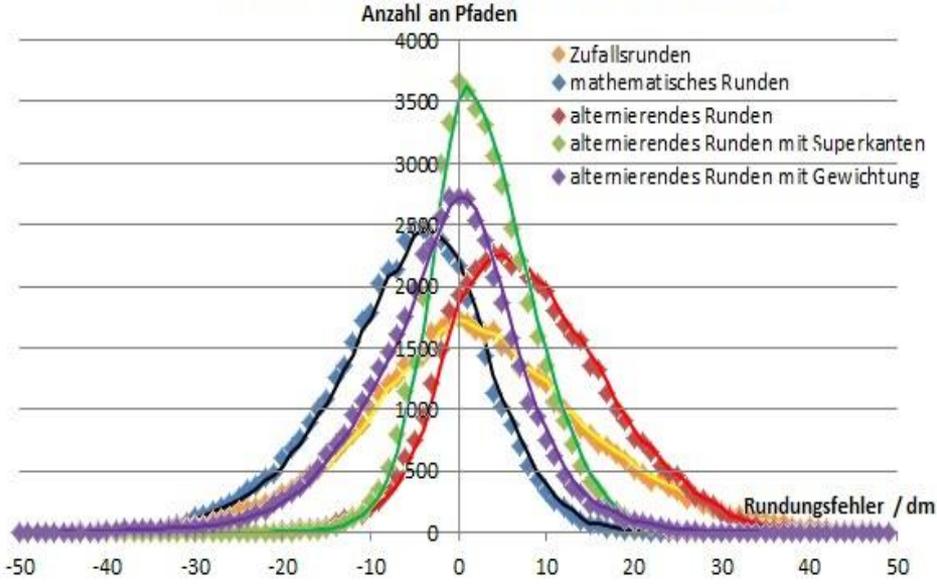
Absoluter Fehler Höhenmeter 10k



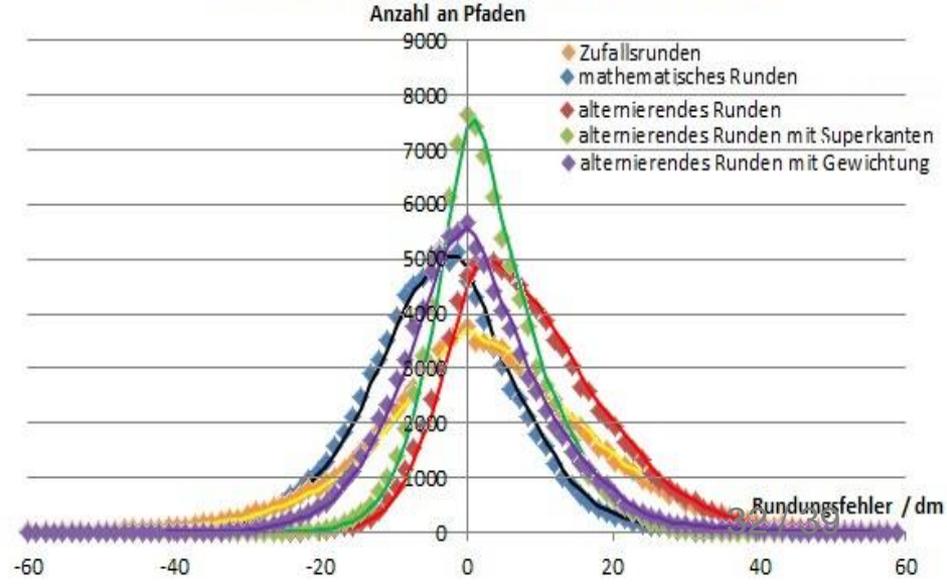
Absoluter Fehler Höhenmeter 100k



Absoluter Fehler Höhenmeter 500k



Absoluter Fehler Höhenmeter 1m



Empirische Auswertung

Graph	10k	100k	500k	1m
Stichprobengröße	2.000 Paare	10.000 Paare	50.000 Paare	100.000 Paare
kein Pfad	69 Paare	126 Paare	232 Paare	563 Paare
Math. Runden	10,70 dm	54,89 dm	76,88 dm	109,34 dm
Zufallsrunden	18,81 dm	83,93 dm	168,60 dm	244,41 dm
Alternierendes Runden	11,90 dm	42,43 dm	81,97 dm	112,26 dm
+ Superkanten	7,30 dm	28,53 dm	35,38 dm	57,96 dm
+ Gewichtung	9,60 dm	43,26 dm	78,08 dm	105,33 dm

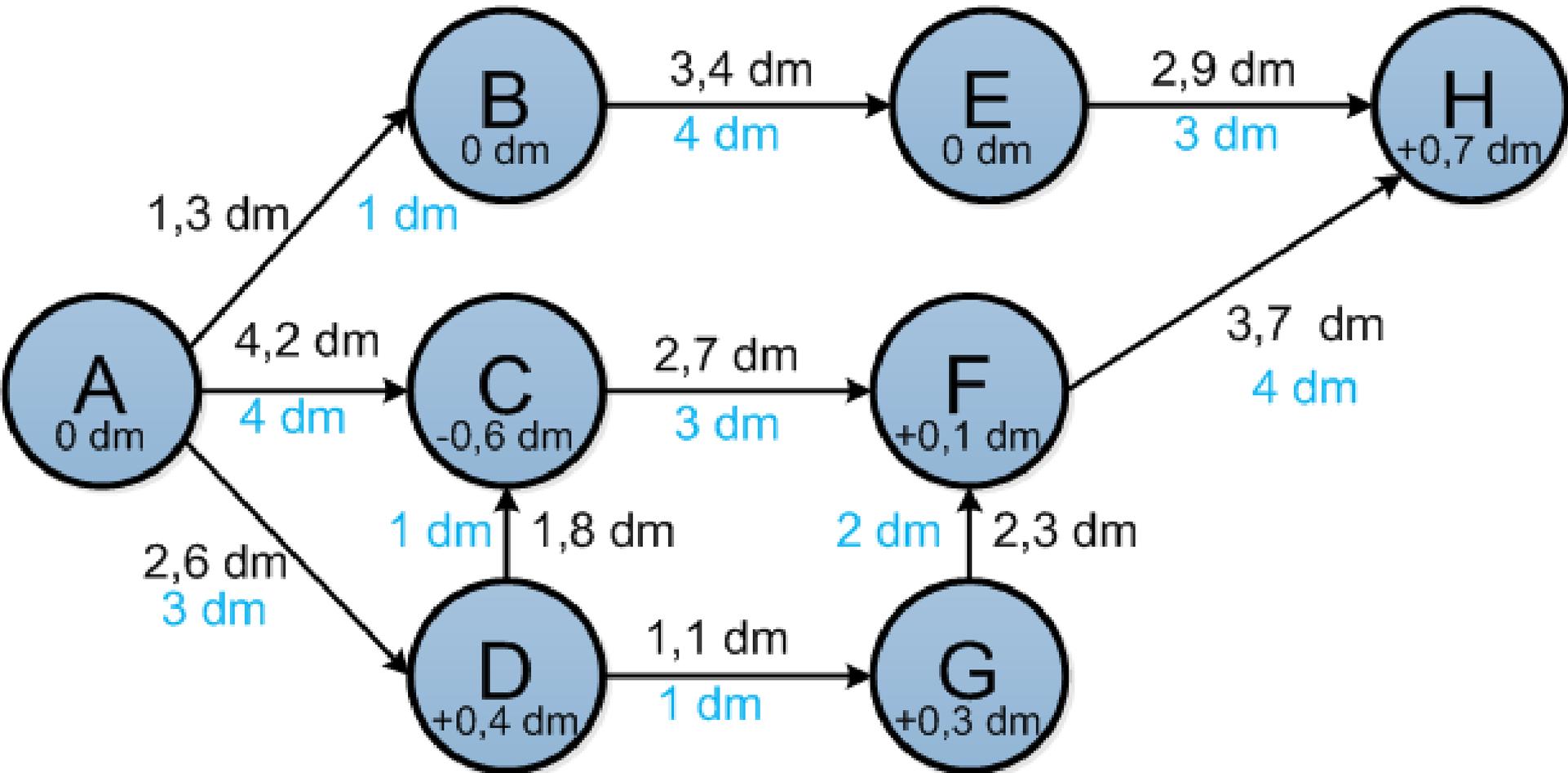
Gewichtetes Runden

- Zusammensetzung: Gewichtung & Superkanten
- Ähnlich: Breitensuche

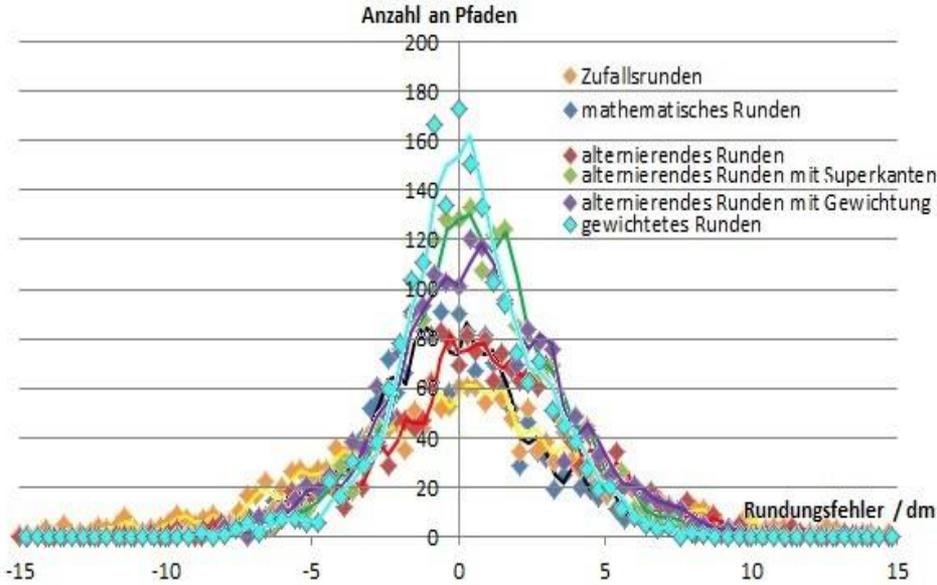
- Start bei zufälligem Knoten
- Kanten individuell gerundet
- Fehler ab Start

- Mehraufwand: $O(n^2 + 2n)$

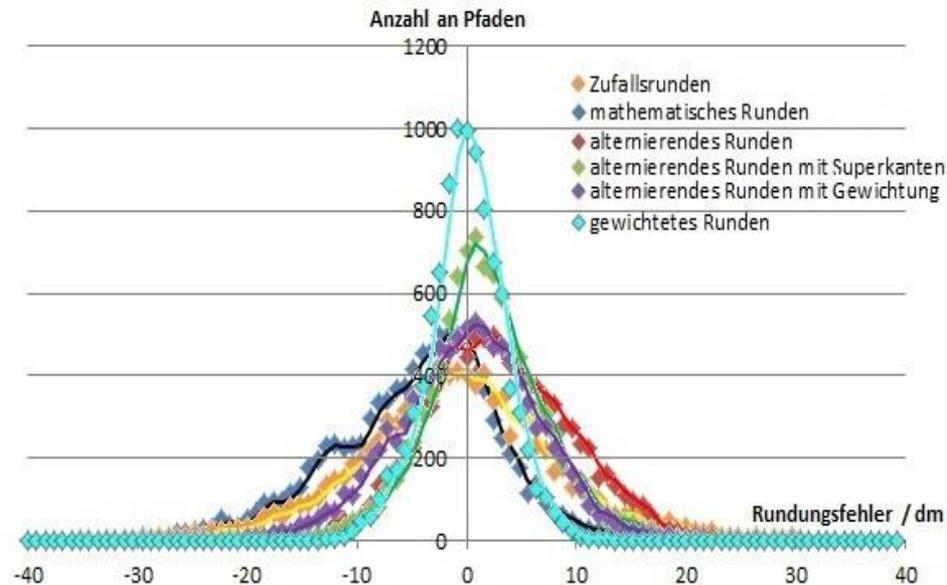
Beispiel



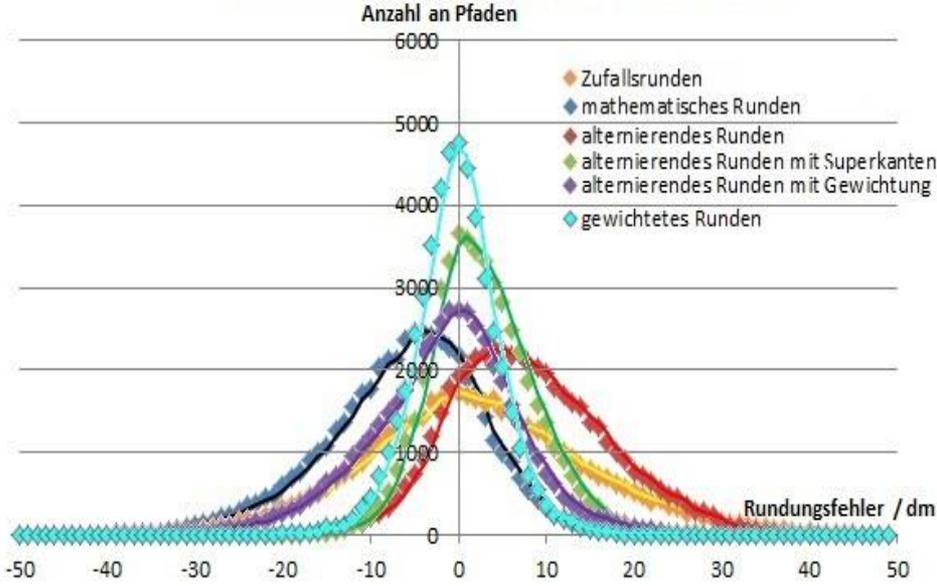
Absoluter Fehler Höhenmeter 10k



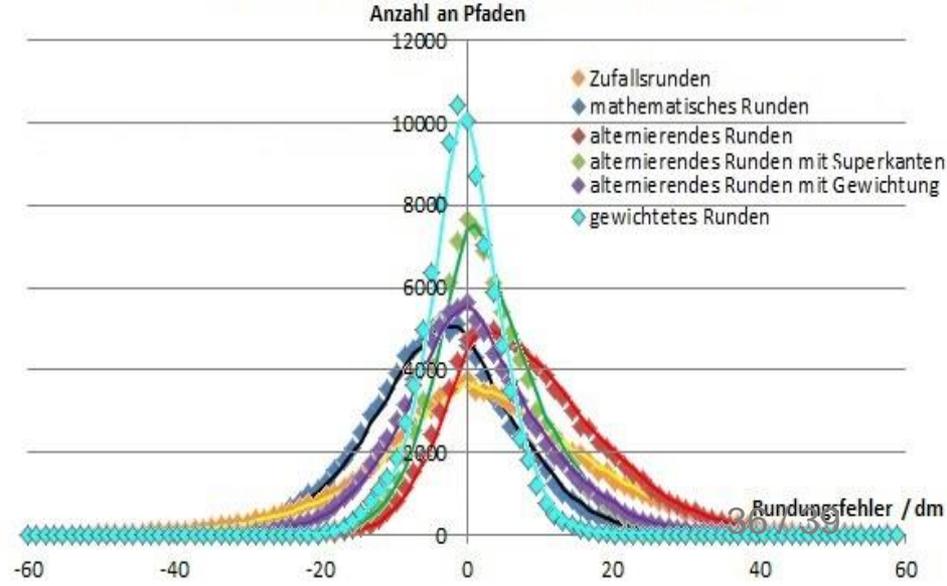
Absoluter Fehler Höhenmeter 100k



Absoluter Fehler Höhenmeter 500k



Absoluter Fehler Höhenmeter 1m



Empirische Auswertung

Graph	10k	100k	500k	1m
Stichprobengröße	2.000 Paare	10.000 Paare	50.000 Paare	100.000 Paare
kein Pfad	69 Paare	126 Paare	232 Paare	563 Paare
Math. Runden	10,70 dm	54,89 dm	76,88 dm	109,34 dm
Zufallsrunden	18,81 dm	83,93 dm	168,60 dm	244,41 dm
Alternierendes Runden	11,90 dm	42,43 dm	81,97 dm	112,26 dm
+ Superkanten	7,30 dm	28,53 dm	35,38 dm	57,96 dm
+ Gewichtung	9,60 dm	43,26 dm	78,08 dm	105,33 dm
Gewichtetes Runden	5,67 dm	12,59 dm	23,23 dm	28,81 dm

Erweiterungen

- Mehrfacher Durchlauf
- Besseres Fehlerermitteln
- Bessere Verteilung der veränderten Kanten

Quellen

- [1] Behrens, Jan (2008 - 2009): Algorithmus zum summenerhaltenden Runden unter Berücksichtigung von beliebig ineinandergeschachtelten Teilsummen (Fassung von 2009). Online:
<http://www.magnetkern.de/tree-round.html>
(letzter Abruf: 03.01.2015)
- [2] Zervos, Michalis (2013): Image dithering in Matlab (Fassung vom 09.03.2013)
Online: <http://michal.is/projects/image-dithering-in-matlab>
(letzter Abruf: 05.01.2015)